Capítulo 1

Álgebra

1.1. Año 2000

1.1.1. Modelo

Opción A

Problema 1.1.1 *(3 puntos)* Sea el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & \lambda y+ & 2z= & \lambda \\ 2x+ & \lambda y- & z= & 2 \\ \lambda x- & y+ & 2z= & \lambda \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 2$.

Opción B

Problema 1.1.2 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Encontrar los valores de λ para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es invertible.

b) (1 punto) Para $\lambda = 2$, hallar la inversa de A y comprobar el resultado.

c) (1 punto) Resolver el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $\lambda = 1$

1.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.1.3 *(3 puntos)* Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2×2.

a) (0,5 puntos) Comprobar que se verifica:

$$Traza(A + B) = Traza(A) + Traza(B)$$

b) (1 punto) Comprobar que

$$Traza(A \cdot B) = Traza(B \cdot A)$$

c) (1 punto) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB - BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

d) (0,5 puntos) Encontrar dos matrices A y B para las que:

$$Traza(AB) \neq Traza(A) \cdot Traza(B)$$

Opción B

Problema 1.1.4 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax+ & y+ & z= & (a-1)(a+2) \\ x+ & ay+ & z= & (a-1)^2(a+2) \\ x+ & y+ & az= & (a-1)^3(a+2) \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Comprobar que es compatible para todo valor de a.

b) (1 punto) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para $a = 1$ y para $a = -2$.

c) (1 punto) Resolverlo para $a = -2$.

1.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.1.5 *(3 puntos)* Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrl} & y+ & z= & 1 \\ (\lambda-1)x+ & y+ & z= & \lambda \\ x+ & (\lambda-1)y- & z= & 0 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 0$.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 3$.

Opción B

Problema 1.1.6 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & kz = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Discutir en función de los valores de λ y resolver en los casos de compatibilidad del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & 3z = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \\ x+ & 2y+ & 2\lambda z = & \lambda \end{array}\right.$$

1.2. Año 2001

1.2.1. Modelo

Opción A

Problema 1.2.1 *(2 puntos)* Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Problema 1.2.2 *(2 puntos)* Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) calcular A^{-1}

b) Resolver el sistema $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.2.3 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver cuando tenga más de una solución, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrl} x+ & y+ & 2z = 3 \\ 2x- & y+ & kz = 9 \\ x- & y- & 6z = 5 \end{array}\right.$$

b) (1,5 puntos) Si el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ y $\overrightarrow{F_3}$, así como una combinación lineal nula de los vectores columna $\overrightarrow{C_1}$, $\overrightarrow{C_2}$, $\overrightarrow{C_3}$ y $\overrightarrow{C_4}$.

1.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.2.4 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ 2x- & y+ & 3z = & 2 \\ 5x- & y+ & az = & 6 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Problema 1.2.5 *(2 puntos)* Sea k un número natural y sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Calcular A^k.

b) (1 punto) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^kX = BC$.

Opción B

Problema 1.2.6 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real λ.

b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -3$.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 1$.

1.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.2.7 *(3 puntos)* Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & 4z = & 1 \\ -x+ & ay- & 2z = & 1 \\ & y+ & z = & a \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Opción B

Problema 1.2.8 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) (1 punto) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1}.

c) (1 punto) Calcular A^{100}.

(Septiembre 2001 - Opción B)

1.3. Año 2002

1.3.1. Modelo

Opción A

Problema 1.3.1 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota la matriz identidad.

a) (1 punto) Demostrar que A es no singular ($det(A) \neq 0$) y expresa A^{-1} en función de A e I.

b) (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$

c) (1 punto) Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

Opción B

Problema 1.3.2 *(3 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcular A^{-1}.

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Problema 1.3.3 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real O definimos la matriz $B = A - OI$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

a) (1 punto) Hallar los valores de O que hacen que el determinante de B sea nulo.

b) (1 punto) Resolver el sistema

$$B\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para los diferentes valores de O.

1.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.3.4 *(2 puntos)* Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Problema 1.3.5 *(2 puntos)* Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Opción B

Problema 1.3.6 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y & & = \ 2 \\ ax+ & y+ & 2z & = \ 0 \\ x- & y+ & az & = \ 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (0,5 punto) Resolver el sistema para $a=-1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a=2$.

1.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.3.7 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependientes del parámetro real λ:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & \lambda z & = \ \lambda^2 \\ & y- & z & = \ \lambda \\ x+ & \lambda y+ & z & = \ \lambda \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los caso en que sea posible.

c) (0,5 puntos) En el caso $\lambda=2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

Opción B

Problema 1.3.8 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n.

Se pide:

a) (1 punto) Expresar A^{-1} en términos de A

b) (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.

c) (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

)

1.4. Año 2003

1.4.1. Modelo

Opción A

Problema 1.4.1 *(3 puntos)* Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

a) (1 punto) Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I.

b) (1 punto) Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Opción B

Problema 1.4.2 *(3 puntos)* Hallar todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Modelo 2003 - Opción B)

Problema 1.4.3 *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real k, se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k^2 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

1.4.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.4.4 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z=3 \\ mx- & y+ & z=2 \\ x+ & my- & z=1 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

b) (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m.

Opción B

Problema 1.4.5 *(2 puntos)* Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\left|\begin{array}{ccc} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = (a-b)^3$$

(Junio 2003 - Opción B)

Problema 1.4.6 *(2 puntos)* Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \left(\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{array}\right) = B \cdot \left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{array}\right)$$

1.4.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.4.7 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z=9 \\ mx+ & 2y+ & z=5 \\ x+ & y+ & z=2 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.

b) (1,5 puntos) Resolverlo para $m = 1$.

Opción B

Problema 1.4.8 *(2 puntos)* Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el precio de cada billete.

b) (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

Problema 1.4.9 *(2 puntos)*

a) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A+B=AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:
$$(I-B)^{-1} = -B^{-1}A$$
(Donde I denota la matriz identidad).

b) Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$
hallar la matriz B para la cual se verifica $A+B=AB$.

1.5. Año 2004

1.5.1. Modelo

Opción A

Problema 1.5.1 *(3 puntos)* Discutir según los valores del parámetro λ, y resolver en los casos que sea posible el sistema:
$$\left\{\begin{array}{rrrr} 6x+ & 4y+ & 2\lambda z= & 2 \\ \lambda x+ & y- & z= & 2 \\ 5x+ & 3y+ & 3z= & 2\lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.5.2 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:
$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & az= & 4 \\ x+ & ay+ & z= & 2 \\ x+ & 4y- & 5z= & 6 \end{array}\right.$$
Se pide:

a) (2 punto) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

1.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.5.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones
$$\left\{\begin{array}{rrrl} (1-a)x- & 2y+ & 4z & =0 \\ x- & (1+a)y+ & z & =0 \\ -x+ & ay- & z & =0 \end{array}\right.$$

a) (1,5 punto) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Opción B

Problema 1.5.4 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto) Hallar A^{-1}.

b) (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

Problema 1.5.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rr} x+ & 2y = 1 \\ 3x- & y = 2 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

b) (1 punto) Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rrr} 2x+ & 2y- & z = 1 \\ x+ & y+ & 2z = 1 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante siga siendo compatible indeterminado.

1.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.5.6 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determinar la matriz inversa de B.

b) (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$.

Problema 1.5.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?

b) (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.5.8 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x+ & 3y+ & z= & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & \lambda z= & 1 \\ x+ & y- & z= & 1 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

1.6. Año 2005

1.6.1. Modelo

Opción A

Problema 1.6.1 *(3 puntos)*

a) (2 punto) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2\lambda x+ & 2y+ & \lambda z= & 1 \\ x+ & \lambda y- & z= & 1 \\ 4x+ & 3y+ & z= & 2\lambda \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Opción B

Problema 1.6.2 *(2 puntos)* Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -ax+ & 4y+ & az= & -a \\ 4x+ & ay- & az= & a \\ -x- & y+ & z= & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema

b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Problema 1.6.3 *(2 puntos)* Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0$$

b) (1 punto) Hallar A^n.

1.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.6.4 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m-1)x+ & y+ & z= & 3\\ mx+ & (m-1)y+ & 3z= & 2m-1\\ x+ & 2y+ & (m-2)z= & 4 \end{array}\right.$$

a) (1,5 punto) Discutirlo según los distintos valores de m.

b) (1,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Opción B

Problema 1.6.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z=1\\ 2x+ & y- & z=2 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x+y+\alpha z=\beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Problema 1.6.6 *(2 puntos)* Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA=B$$

siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

1.6.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.6.7 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2=\alpha A+\beta I$.

b) (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)(A+X)=A^2-X^2$.

Opción B

Problema 1.6.8 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & k & t\\ 0 & 0 & k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 1 & k & t\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar A^{10}.

b) (1 puntos) Hallar la matriz inversa de B.

c) (1 punto) En el caso particular de $k=0$, hallar B^{10}.

1.7. Año 2006

1.7.1. Modelo

Opción A

Problema 1.7.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & z = & k \\ x+ & 2y+ & 3z = & 2 \\ kx+ & ky- & 4z = & -1 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Opción B

Problema 1.7.2 *(3 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Hallar $(A - I)^2$.

b) (1,5 punto) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

1.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.7.3 *(2 puntos)* Dado el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & ky & -z = 0 \\ kx- & y & +z = 0 \\ (k+1)x+ & y & = 0 \end{array}\right.$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en tales casos.

Problema 1.7.4 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $AP = PA$.

Opción B

Problema 1.7.5 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

1.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.7.6 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Comprobar que $|A^2| = |A|^2$, y que $|A + I| = |A| + |I|$

b) (0,5 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple $|M^2| = |M|^2$?. Razonar la respuesta.

c) (1,5 puntos) Encontrar todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que:

$$|M + I| = |M| + |I|$$

Opción B

Problema 1.7.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x+ & y- & 3z = 0 \\ 2x+ & 3y- & z = 5 \end{array} \right.$$

b) (1 punto) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

Problema 1.7.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

b) (1 punto) Para cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado 1.), calcular

$$M = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10}$$

1.8. Año 2007

1.8.1. Modelo

Opción A

Problema 1.8.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & k^2z = & 1\\ x+ & ky- & kz = & k^2\\ -x+ & ky- & k^2z = & k^2 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo para $k = -1$.

Opción B

Problema 1.8.2 *(3 puntos)* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda\\ 2 & -\lambda & 1\\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ.

b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M. Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

1.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.8.3 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1)\\ m & 1 & m\\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m.

Problema 1.8.4 *(2 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -9\\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

Opción B

Problema 1.8.5 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0\\ c & c & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.

b) (1,5 puntos) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

1.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.8.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & (k+1)y+ & 2z = & -1 \\ kx+ & y+ & z = & k \\ (k-1)x- & 2y- & z = & k+1 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Opción B

Problema 1.8.7 *(2 puntos)* Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 1.8.8 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax+y+bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

b) (1 punto) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

1.9. Año 2008

1.9.1. Modelo

Opción A

Problema 1.9.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & mz = & m+2 \\ 2x+ & (m+1)y+ & (m+1)z = & -m \\ (m+2)x+ & 3y+ & (2m+1)z = & 3m+4 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Opción B

Problema 1.9.2 *(3 puntos)* Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$.

b) (1 punto) Calcular A^{10}.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A - M)(A + M) = A^2 - M^2$$

1.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.9.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x- & ay = & 2 \\ ax- & y = & a+1 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.

b) (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene solución en la que $y = 2$.

Opción B

Problema 1.9.4 *(3 puntos)* Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_2.

b) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_3.

c) (2 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_5.

1.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.9.5 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

Opción B

Problema 1.9.6 *(2 puntos)* Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & +2z & & = & 0 \end{array} \right.$$

Problema 1.9.7 *(2 puntos)* El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

1.10. Año 2009

1.10.1. Modelo

Opción A

Problema 1.10.1 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

b) (1 punto) Resolverlo en los casos en que sea posible.

Problema 1.10.2 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

Opción B

Problema 1.10.3 *(3 puntos)* Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3, y se sabe que $det(A) = 4$, se pide:

a) (1 punto) Calcular $det(A^3)$ y $det(3A)$.

b) (2 puntos) Calcular $det(B)$ y $det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son:
$$2C_3, C_1 - C_2, 5C_1$$

1.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.10.4 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x+ & 4\lambda y+ & 2z = & 2\lambda \\ \lambda x+ & y- & \lambda z = & \lambda \\ 4\lambda x+ & 4\lambda y+ & \lambda z = & 9 \end{array}\right. ,$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Opción B

Problema 1.10.5 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (0,5 punto) Resolver el sistema cuando sea posible

Problema 1.10.6 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de A según los distintos valores del parámetro a.

b) (1 punto) Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$

1.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.10.7 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

a) (1,25 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.

b) (0,5 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.

c) (1,25 puntos) Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M.

Opción B

Problema 1.10.8 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{array}\right. ,$$

se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores de parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0$$

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

Problema 1.10.9 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$

1.10.4. Reserva

Opción A

Problema 1.10.10 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = \sqrt{3} \\ 3x + 2z = 2\sqrt{5} \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible determinado.

b) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Problema 1.10.11 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X que verifique la ecuación matricial $XB = A + B$

Opción B

Problema 1.10.12 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} (m+1)x+ & y+ & z = & 0 \\ x+ & (m+1)y+ & z = & m \\ x+ & y+ & (m+1)z = & m^2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $m = 0$.

1.11. Año 2010

1.11.1. Modelo

Opción A

Problema 1.11.1 *(2 puntos)* Obtener, para todo número natural n, el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Problema 1.11.2 *(2 puntos)* Discutir razonadamente, en función del parámetro k, el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & z = & k+2 \\ kx+ & y+ & z = & k \\ x+ & y+ & kz = & -2(k+1) \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.11.3 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & & z = & 2 \\ x+ & \lambda y- & z = & 4 \\ -\lambda x- & y- & z = & -5 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ

b) (1 punto) Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -2$.

1.11.2. Ordinaria-General

Opción A

Problema 1.11.4 *(2 puntos)* Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & ky- & z = & 0 \\ 2x- & y+ & 2z = & 0 \\ x- & 4y+ & kz = & 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$.

b) (1 punto) Resolverlo para el casa de $k = 3$.

Problema 1.11.5 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2 = aA + bI$.

b) (1 punto) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

Opción B

Problema 1.11.6 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ay- & z = & a \\ ax+ & & 2z = & -2 \\ x+ & & z = & -2 \end{array}\right.$$

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolverlo en el caso de $a = 0$.

1.11.3. Ordinaria-Específica

Opción A

Problema 1.11.7 *(3 puntos)* Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

b) (1 punto) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$

c) (1 punto) $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix}$

Opción B

Problema 1.11.8 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & my+ & 3z = & 3 \\ x+ & y- & 2z = & 0 \\ 5x+ & (m+1)y+ & z = & 9 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para el caso de $m = 0$.

Problema 1.11.9 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ estudiar para que valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

1.11.4. Extraordinaria-General

Opción A

Problema 1.11.10 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m

b) (1 punto). En el caso de $m = 0$, resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.11.11 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la compatibilidad del sistema

b) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.

c) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

Problema 1.11.12 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) (1 punto). ¿Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

1.11.5. Extraordinaria-Específica

Opción A

Problema 1.11.13 *(3 puntos)* El sistema $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz B

a) (1 punto). Determinar, si existen, el valor o valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

b) (0,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de b para los que el sistema es incompatible.

c) (1,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de c para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

Opción B

Problema 1.11.14 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & kz = & k \\ x+ & ky+ & z = & k^2 \\ kx+ & y+ & z = & 1 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro k.

b) (1 punto). Resolverlo para $k = 0$.

1.12. Año 2011

1.12.1. Modelo

Opción A

Problema 1.12.1 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x & + & \lambda z = & 2 \\ x+ & \lambda y- & z = & 1 \\ x+ & 3y+ & z = & 2\lambda \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

Opción B

Problema 1.12.2 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A + 3I$

b) (1 punto). Demostrar que la matriz inversa A^{-1} de A es $\dfrac{1}{3}(4I - A)$.

c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$.

1.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.12.3 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular el rango de A en función de los valores de a.

b) (1 punto). En el caso de $a = 2$, discutir el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b, y resolverlo cuando sea posible.

c) (1 punto). En el caso de $a = 1$, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.12.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (m-1) \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

según los valores de m.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

1.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.12.5 *(2 puntos).* Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a.

Problema 1.12.6 *(2 puntos).* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz M.

b) (1 punto). Hallar la matriz M^2.

c) (0,5 puntos). Hallar la matriz M^{25}.

Opción B

Problema 1.12.7 *(3 puntos).* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & 4y & & = 4k \\ -k^3x+ & k^2y+ & kz & = 0 \\ x+ & ky & & = k^2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo en función del valor del parámetro k.

b) (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 1$.

c) (0'5 puntos). Resolver el sistema para $k = 2$.

1.13. Año 2012

1.13.1. Modelo

Opción A

Problema 1.13.1 *(3 puntos)* Dado el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2\\ -3x+ & 2y+ & 3z = & -2\\ 2x+ & my- & 5z = & -4 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

Opción B

Problema 1.13.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y = & 1\\ 3x+ & y = & -a\\ -3x+ & 2ay = & 7 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea compatible..

1.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.13.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2\\ 1 & -1 & k\\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 12\\ 6\\ 8 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4\\ 3\\ 3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el rango de A en función de los valores de k.

b) (0,75 puntos) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = B$.

c) (0,75 puntos) Para $k = 1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = C$.

Opción B

Problema 1.13.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de a.

b) (1 punto). Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

Problema 1.13.5 *(2 puntos)* Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

)

1.13.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.13.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 3x+ & 2y+ & (a-1)z = & 1 \\ -x+ & ay+ & z = & 0 \\ 2x+ & y- & 2z = & 3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir sus soluciones según los valores de a.

b) (1 punto). Hallar la solución del sistema para $a = 1$.

Opción B

Problema 1.13.7 *(3 puntos)* . Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$, calcular los siguientes determinantes:

$a)$ (1,5 puntos) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix}$, $b)$ (1,5 puntos) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

1.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.13.8 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & ay+ & 4z= & 6\\ x+ & (a+1)y+ & z= & 3\\ (a-1)x- & ay- & 3z= & -3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a=-1$.

Opción B

Problema 1.13.9 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{lrrr} x- & & 2z= & 2\\ ax- & y+ & z= & -8\\ 2x+ & & az= & 4 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a=-5$.

1.14. Año 2013

1.14.1. Modelo

Opción A

Problema 1.14.1 *(3 puntos)* Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & (m+3)z= & 3\\ x+ & y+ & (4+m-m^2)z= & 3\\ 2x+ & 4y+ & 3(m+2)z= & 8 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto). Resolverlo para $m=-2$.

Opción B

Problema 1.14.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dada la matriz $A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 2\\ 2 & 1 \end{array}\right)$ y la matriz $X=\left(\begin{array}{cc} x & y\\ z & t \end{array}\right)$ obtener las relaciones que deben cumplir x, y, z, t para que la matriz X verifique $AX=XA$.

b) (0,5 puntos). Dar un ejemplo de matriz X distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior.

c) (0,5 puntos). Calcular la inversa de la matriz A.

Problema 1.14.3 *(2 puntos)* De las matrices cuadradas A y B se sabe que:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Calcular la matriz $A-B$.

b) (1 punto). Calcular las matrices A y B.

1.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.14.4 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & 7y+ & 5z= & 0 \\ x+ & ay+ & z= & 3 \\ & y+ & z= & -2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a=4$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a=2$.

Opción B

Problema 1.14.5 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $XA=B$ tiene solución única.

b) (1 punto). Calcular la matriz X para $\lambda=4$.

c) (1 punto). Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ.

1.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.14.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x+ & 2y- & 3z= & 2\lambda \\ x+ & y+ & z= & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z= & 2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de λ.

b) (1,5 puntos). Para los valores de λ tales que el sistema tiene solución única, obtener esta solución en función de λ.

Opción B

Problema 1.14.7 *(3 puntos)* Sean A y B matrices 2 con determinantes: $\det A=5$, $\det B=3$. Se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar $\det\left[B^{-1}A^2B^2\right]$

b) (0,5 puntos). Hallar $\det\left[A+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A\right]$.

c) (1 punto). Si c_1 y c_2 son las columnas de la matriz A (es decir, $A=(c_1\ c_2)$), hallar la solución del sistema:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(c_2)$$

Problema 1.14.8 *(2 puntos)* Dada la matriz: $A=\begin{pmatrix} -3 & \lambda+1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto). Determinar λ para que A sea invertible.

b) (1 punto). Calcular A^{-1} en el caso $\lambda=1$.

(Junio 2013 (coincidente)- Opción B)

1.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.14.9 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix};\quad O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Calcular el determinante de A. Determinar el rango de A según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ en el caso $a = 1$.

c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ cuando $a = -1$.

Opción B

Problema 1.14.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & \lambda y+ & \lambda z = & 1-\lambda \\ x+ & y+ & (\lambda-1)z = & -2\lambda \\ (\lambda-1)x+ & y+ & z = & \lambda-1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = -1$.

1.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.14.11 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A.

b) (1 punto). ¿Son iguales las matrices $(A^{-1})^2$ y $(A^2)^{-1}$?

c) (1 punto). Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación matricial $AX = B$.

Opción B

Problema 1.14.12 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\left|\begin{array}{ccr} x+1 & 1 & 6 \\ x-1 & 0 & -6 \\ x^2+2 & x & 12 \end{array}\right| = 6$$

Problema 1.14.13 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ay- & z = & 0 \\ 3x+ & 2y+ & az = & 0 \\ 7x+ & 9y+ & 9z = & 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo para $a = 5$.

1.15. Año 2014

1.15.1. Modelo

Opción A

Problema 1.15.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1 punto). Hallar la matriz A^{-1} para $k = 6$.

c) (1,5 puntos). Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para $k = 6$.

Opción B

Problema 1.15.2 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrr} (a+2)x+ & (a+1)y = & -6 \\ x+ & 5y = & a \\ x+ & y = & -5 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea posible.

Problema 1.15.3 *(2 puntos)* Sabiendo que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

es igual a 1, calcular el valor de los determinantes:

a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

1.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.15.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Calcula α, β y γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX = B$.

b) (1 punto). Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX = O$ sea compatible determinado?

c) (0,5 puntos). Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelve el sistema $AX = B$.

Opción B

Problema 1.15.5 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{se pide :}$$

a) (1 punto). Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso $a = 2$.

Problema 1.15.6 *(2 puntos)* Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

a) (1 punto). Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) (1 punto). Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

1.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.15.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 1 \\ & y- & z = & a \\ x+ & y- & z = & 3a^2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

Opción B

Problema 1.15.8 *(3 puntos)* Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a 10, se pide calcular justificadamente:

a) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{pmatrix}$.

b) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$.

c) (1 punto). El determinante de la matriz $(BB^t)^3$, donde $B = \begin{pmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ y B^t es la matriz transpuesta de B.

1.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.15.9 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1 punto). Para $a = -2$, hallar la matriz inversa A^{-1}.

c) (1 punto). Para $a = 1$, calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$.

Opción B

Problema 1.15.10 *(2 puntos)* Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2, se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.

b) (1 punto).Calcular B en el caso $a = 1$.

Problema 1.15.11 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a.

1.16. Año 2015

1.16.1. Modelo

Opción A

Problema 1.16.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A^{20}.

c) (0,75 puntos). Para $m = -2$, resolver el sistema $AX = O$.

d) (0,75 puntos). Para $m = 0$, resolver el sistema $AX = B$.

Opción B

Problema 1.16.2 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos). Hallar X e Y, matrices 2×2, tales que

$$X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

b) (0,5 puntos). Hallar Z, matriz invertible 2×2, tal que

$$Z^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Problema 1.16.3 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrl} mx+ & y = & 0 \\ x+ & my = & 0 \\ mx+ & my = & 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

1.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.16.4 *(3 puntos)*

a) (2 puntos). Discutir, según los valores de m, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x+ & 3y+ & (m-1)z = & 0 \\ x- & 2y+ & mz = & 1 \\ 5x+ & my+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

b) (1 punto). Resolver el sistema anterior para el caso $m = 1$.

Opción B

Problema 1.16.5 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular A^{15} y A^{20}

b) (1 punto). Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

Problema 1.16.6 *(2 puntos)* Dadas las matrices:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}$, e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,25 puntos). Hallar el rango de A en función de t.

b) (0,75 puntos). Calcular t para que $\det(A - tI) = 0$.

1.16.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.16.7 *(2 puntos)* Dadas las matrices: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
se pide:

a) (1 punto). Calcular la matriz inversa de L.

b) (1 punto). Buscar la matriz A, tal que $LAL^t = I$, donde L^t es la traspuesta de L.

Problema 1.16.8 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A, según los valores de m, e indicar para qué valores de m admite inversa la matriz A.

b) (1 punto). Sin calcular A^{-1}, hallar m para que $det(A) = det(4A^{-1})$.

Opción B

Problema 1.16.9 *(3 puntos)*

a) (2 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rrl} 2x+ & y= & 5\\ x+ & my= & 7\\ x- & y= & 4 \end{array}\right.$, en función de los valores del parámetro m y hallar la solución del sistema anterior en los casos en los que ésta sea única.

b) (1 punto). Encontrar el valor o valores de k que hacen incompatible el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & kz= & 2\\ kx- & ky+ & 4z= & -4 \end{array}\right.$$

1.16.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.16.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -mx+ & my+ & z= & 0\\ x- & my+ & 3z= & 4\\ 2x- & 2y- & z= & 0 \end{array}\right.$$

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

Opción B

Problema 1.16.11 *(2 puntos)* Sabiendo que $\left|\begin{array}{ccc} a & b & c\\ d & e & f\\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right| = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) (1 punto). $\left|\begin{array}{ccc} 2a-2b & c & 5b\\ 2d-2e & f & 5e\\ -2 & 3 & 10 \end{array}\right|$

b) (1 punto). $\left|\begin{array}{ccc} a-1 & b-2 & 2c-6\\ 2 & 4 & 12\\ d & e & 2f \end{array}\right|$

Problema 1.16.12 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \left(\begin{array}{cc} 3 & 1\\ 1 & 0 \end{array}\right)$ hallar todas las matrices $B = \left(\begin{array}{cc} a & b\\ c & d \end{array}\right)$ que conmutan con A, es decir que cumplen $AB = BA$.

1.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.16.13 *(3 puntos)* Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que la matriz M tenga inversa.

b) (1 punto). Hallar la inversa de M, para $a = 2$.

c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $MX = O$, para $a = 1$.

Opción B

Problema 1.16.14 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 1 \\ (k-1)x+ & y+ & z= & k \\ x+ & (k-1)y+ & z= & 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto). Resolverlo para $k = 0$ y para $k = 1$.

1.17. Año 2016

1.17.1. Modelo

Opción A

Problema 1.17.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & kz= & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z= & 3 \\ kx+ & 2y- & z= & 3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de k.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 2$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 1$.

Opción B

Problema 1.17.2 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor o valores de λ que hacen que el determinante de la matriz $M - \lambda I$ sea igual a 0.

b) (1 punto). Para $\lambda = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales: $(M - \lambda I)X = O$.

Problema 1.17.3 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.

1.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.17.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Despeje X en la ecuación matricial $X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A; B; C; D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

b) (1,5 puntos). Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que $YB = A$.

Opción B

Problema 1.17.5 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcccr} 3x+ & y & + & mz = & 1 \\ x- & y & + & 2z = & -2 \\ 5x+ & (m+1)y & + & 2z = & 4 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

1.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.17.6 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que se verifique la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) (1,5 puntos). Para $a = 2$, resolver la ecuación matricial $AXA^{-1} = B$.

c) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz $(2B)^{-1}$.

Opción B

Problema 1.17.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcccrl} ax- & y & + & z = & 0 \\ x+ & y & + & az = & 0 \\ ax+ & 4y & + & 2z = & a \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = -1$.

1.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.17.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto). Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.17.9 *(2 puntos)* Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?

Opción B

Problema 1.17.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x+ & (a-1)y & - & 2z= & a\\ 2x+ & y & - & az= & 2\\ -x+ & y & + & z= & 1-a \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

1.18. Año 2017

1.18.1. Modelo

Opción A

Problema 1.18.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m\\ 2 & 4 & 1\\ m & 2 & -1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el rango de B en función de los valores de m.

b) (1,5 puntos) Calcular la matriz inversa de A y comprobar que verifica $A^{-1}=\frac{1}{5}(A^2+3C)$.

Opción B

Problema 1.18.2 *(2 puntos)* A un florista le han encargado preparar 5 ramos iguales para cinco eventos. El precio total acordado es de 610 euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará un total de 24 flores y el número de rosas empleado doblará al número total de flores de otras especies. ¿Cuál es el número de flores de cada tipo que usará en cada ramo sabiendo que cada rosa cuesta 6 euros, cada tulipán cuesta 4 y cada lila 3?

1.18.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.18.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 2x+ay+z=a\\ x-4y+(a+1)z=1\\ 4y-az=0 \end{array}\right.$, se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.

b) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $a=1$.

c) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $a=2$.

Opción B

Problema 1.18.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) (1 punto) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A = PJP^{-1}$.

1.18.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.18.5 *(2 puntos)* En un supermercado tienen tres artículos con ofertas por la compra de una segunda unidad. La segunda unidad del artículo A tiene un descuento del 60 %, la segunda unidad del artículo B tiene un descuento del 75 %, mientras que la segunda unidad del artículo C se oferta con un descuento del 50 %. Si un cliente compra un artículo de cada clase y, por lo tanto, no se beneficia de descuento alguno, debe pagar 26 euros. Si compra dos artículos de cada clase pagará 35,20 euros. Finalmente, si no adquiere el artículo A, pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B. Determínese el precio de cada artículo.

Problema 1.18.6 *(2 puntos)* Dada la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular su inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz B para que $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $A^2X = B$.

Opción B

Problema 1.18.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & my+ & 3z = & 4 \\ x+ & y- & 2z = & -2 \\ 3x & + & (m+1)z = & m+2 \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $m = -3$.

c) (0,5 puntos) Para cierto valor de m, que hace que el sistema sea compatible, se ha obtenido una solución con $y = 0$. Determinar x y z para esa solución. ¿Cuál es el valor de m?

1.18.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.18.8 *(2 puntos)* Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72 % de oro y una proporción del 16 % de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

Opción B

Problema 1.18.9 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.

b) (1,5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.

c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

1.18.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.18.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y & = & 1 \\ & ty+ & z = & 0 \\ x+ & (1+t)y+ & tz = & t+1 \end{array} \right.$, se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo en función del parámetro t.

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $t = 0$.

c) (0,5 puntos) Resolverlo para $t = -1$.

Opción B

Problema 1.18.11 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 1 & 0 & 5 & 2a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix}$, se considera la matriz B formada por las tres últimas columnas de A y se pide:

a) (1 punto) Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz B es invertible.

b) (1 punto) Obtener el rango de A en función de los valores del parámetro real a.

c) (1 punto) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, en el caso $a = 0$.

1.19. Año 2018

1.19.1. Modelo

Opción A

Problema 1.19.1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,5 puntos) Obtener los valores de m para los que la matriz $A - mI$ admite inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz inversa de $A - 2I$.

Opción B

Problema 1.19.2 *(2,5 puntos)* Dada la matriz A y los vectores X y B siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2+m \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema lineal $AX = B$ en función de los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema lineal $AX = B$ cuando $m = -1$.

1.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.19.3 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,5 puntos) Obtener los valores de m para los que la matriz $A - mI$ admite inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz inversa de $A - 2I$.

Opción B

Problema 1.19.4 *(2,5 puntos)* Dada la matriz A y los vectores X y B siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2+m \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema lineal $AX = B$ en función de los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema lineal $AX = B$ cuando $m = -1$.

1.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.19.5 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular A^tA y AA^t, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

b) (1,25 puntos) Hallar A^{-1} y resolver el sistema lineal $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) (0,75 puntos) Calcular C^2, donde $C = ABA^t$.

Opción B

Problema 1.19.6 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$A = \begin{cases} 10x- & 20y- & 10z = & 8\alpha + 44 \\ 2x- & 5y+ & 3z = & 4\alpha + 4 \\ 3x- & 7y+ & 2z = & 5\alpha + 9 \end{cases},$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real α.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $\alpha = -3$.

1.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.19.7 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,25 puntos) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro α.

b) (0,75 puntos) Para $\alpha = 0$, calcular, si es posible, A^{-1}.

c) (0,5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso $\alpha = 1$.

Opción B

Problema 1.19.8 *(2,5 puntos)* Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

1.20. Año 2019

1.20.1. Modelo

Opción A

Problema 1.20.1 *(2,5 puntos)* Para cada uno de los siguientes apartados, proponga un ejemplo de matriz cuadrada A, de dimensión 3×3, con todos sus números distintos de cero y con sus tres filas y columnas diferentes, que cumpla la condición pedida.

a) (0,5 puntos) El determinante de A vale 0.

b) (0,5 puntos) El determinante de A vale 1.

c) (0,5 puntos) La matriz A coincide con su traspuesta.

d) (1 punto) Para una cierta matriz cuadrada C, distinta de la matriz nula y de la identidad, se verifica que $A \cdot C = C \cdot A$. (Debe proponer ejemplos concretos para las dos matrices A y C.)

Opción B

Problema 1.20.2 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x & -my- & z = & 0 \\ mx- & 4y+ & (6-2m)z = & -8m \\ -x+ & 2y+ & z = & 6 \end{array}\right. \text{ se pide:}$$

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 6$.

1.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.20.3 *(2,5 puntos)*

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.

b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Opción B

Problema 1.20.4 *(2,5 puntos)* Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

1.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.20.5 *(2,5 puntos)* La aerolínea "Air", para uno de sus vuelos, ha puesto a la venta 12 plazas de Clase Preferente (P), a 250 euros cada una, 36 plazas de Clase Turista (T), a 150 euros cada una, y 72 plazas de Clase Económica (E), a 100 euros cada una. Se sabe que ha vendido el 90 % del total de las plazas, recaudando un importe de 13800 euros.

a) (0,25 puntos) Determine el número total de plazas vendidas.

b) (2,25 puntos) Sabiendo que se han vendido el triple de plazas de clase (T) que de clase (P), obtenga el número de billetes vendidos de cada clase y cuánto dinero se ha recaudado de cada clase.

Opción B

Problema 1.20.6 *(2,5 puntos)*

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & m & 2 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales B no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $m = 1$, calcular la inversa de la matriz B.

c) (1 punto) Para $m = 2$, calcular la matriz producto $A^t B$ (donde A^t denota la matriz traspuesta de A) y el determinante de la matriz $A^2 B$.

Incluyo el examen de Valencia por la expectación generada con éste.

1.20.4. Ordinaria-Valencia

Opción A

Problema 1.20.7 Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$ y que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$,siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (2+2 puntos) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$.

b) (3 puntos) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$.

c) (3 puntos) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$.

Opción B

Problema 1.20.8 Se da el sistema $\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z= & 4 \\ 3x+ & 4y+ & 5z= & 5 \\ 7x+ & 9y+ & 11z= & \alpha \end{array}\right.$, donde α es un parámetro real.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (4 puntos) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible.

b) (4 puntos) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.

c) (2 puntos) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

1.20.5. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.20.9 *(2,5 puntos)*

Dado el sistema de ecuaciones $A = \left\{\begin{array}{rrrr} kx+ & (k+1)y+ & z= & 0 \\ -x+ & ky- & z= & 0 \\ (k-1)x- & y & = & -(k+1) \end{array}\right.$; se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

Opción B

Problema 1.20.10 *(2,5 puntos)*
Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.

b) (0,75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) (0,75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

1.21. Año 2020

1.21.1. Modelo

Opción A

Problema 1.21.1 *(2,5 puntos)* Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78 % de nitrógeno, un 21 % de oxígeno y un 1 % de argón.

a) (0,5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80 %	20 %	0 %
B	70 %	20 %	10 %
C	60 %	40 %	0 %

Opción B

Problema 1.21.2 *(2,5 puntos)* Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema $AX = B$, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

1.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.21.3 *(2,5 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + ay + z = a + 1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{array} \right.$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.

Opción B

Problema 1.21.4 *(2,5 puntos)* Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275,8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63,6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

1.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.21.5 *(2,5 puntos)* Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{c} (k+1)x + 3y + kz = 1 \\ 3x + (k+1)y + 2z = k-1 \\ kx + 2y + kz = 2 \end{array}\right. ,$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real k.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $k = -3$.

Opción B

Problema 1.21.6 *(2,5 puntos)* Sean $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y A una matriz que verifica $AB = BC$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de A.

b) (1 punto) Calcular BCB^{-1}.

c) (1 punto) Encontrar el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $BC\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.21.7 *(2,5 puntos)* Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3, 4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

a) (0,5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.

b) (0,5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.

c) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

d) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.

e) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

Opción B

Problema 1.21.8 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

b) (0,5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

1.22. Año 2021

1.22.1. Modelo

Opción A

Problema 1.22.1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.

b) (1 punto) Para $x = -1$, calcular la inversa de A.

c) (1 punto) Para $x = 1$, hallar $(AB^t)^3$ y $(AB^t)^{2020}$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Opción B

Problema 1.22.2 *(2,5 puntos)* Dados la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$ y el vector $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine el valor o valores de a para los que:

a) (1,5 puntos) El sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ no tenga solución.

b) (1 punto) $A = A^{-1}$.

1.22.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.22.3 *(2,5 puntos)* Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A, B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Opción B

Problema 1.22.4 *(2,5 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax - 2y + (a-1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para $a = 1$.

1.22.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.22.5 *(2,5 puntos)* Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Determine los valores del parámetro real m para los que la matriz A es invertible y calcule su inversa en esos casos.

b) (0,75 puntos) Estudie el sistema de ecuaciones $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ en función del parámetro m.

c) (0,5 puntos) Resuelva el sistema del apartado anterior para el valor $m = 2$.

Opción B

Problema 1.22.6 *(2,5 puntos)* Una tienda online de productos gourmet elabora tres tipos de cafés exclusivos, el Gold Cuvée (a 7,85 euros/kg), el Paradiso (a 13,3 euros/kg) y el Cremissimo (a 24,85 euros/kg). Para ello utiliza solo dos tipos de grano, el Arábica y el Robusta. El Gold Cuvée tiene un 90 % de grano tipo Arábica, el Paradiso un 85 % y el Cremissimo un 80 %.
A lo largo de un mes han necesitado utilizar 27,1 kg de grano del tipo Robusta para atender todos los pedidos y han ingresado un total de 3112,5 euros. Sabiendo que se ha vendido doble cantidad de café Cremissimo que de las otras dos especialidades juntas, se pide calcular los kilogramos de grano del tipo Arábica que se han utilizado a lo largo de ese mes.

1.22.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.22.7 *(2,5 puntos)* Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25 % de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Opción B

Problema 1.22.8 *(2,5 puntos)*

a) (0,75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones $\{x = 1,\ y = 2\}$ y $\{x = 0,\ y = 0\}$.

b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{array}\right.$$

c) (0,75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$.

1.23. Año 2022

1.23.1. Modelo

Opción A

Problema 1.23.1 *(2,5 puntos)* En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60 % del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.

Opción B

Problema 1.23.2 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $a = 1$, calcular la inversa de la matriz A.

c) (1 punto) Para $a = 2$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$.

1.23.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.23.3 *(2,5 puntos)* Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\begin{cases} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para $m = \frac{1}{2}$.

Opción B

Problema 1.23.4 *(2,5 puntos)* Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio la diferencia entre lo que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de 420 euros, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

1.23.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.23.5 *(2,5 puntos)* Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ mx + (m+1)y - z = m - 1 \\ -x - 2y + (2m-1)z = 1 - m \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = 1$.

Opción B

Problema 1.23.6 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcular el valor de a para que el sistema de ecuaciones $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea compatible.

b) (1,5 puntos) Calcular los valores de a, b y c para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

1.23.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.23.7 *(2,5 puntos)* En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Opción B

Problema 1.23.8 *(2,5 puntos)* Se consideran las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$.

b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.

c) (0,5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.

1.23.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.23.9 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) (0,5 puntos) Para $b = a^2$, determinar los valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto) Para $b = 4$ y $a = -2$, calcular $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^t) \cdot B$.

c) (1 punto) Para $b = 1$, discutir el rango de la matriz $A + B$ en función del parámetro a.

Opción B

Problema 1.23.10 *(2,5 puntos)* Los precios de las entradas para un musical son 8 euros para los asistentes menores de 18 años, 25 euros para los adultos de menos de 60 años, y 10 euros para aquellos de al menos 60 años. Tras el concierto, se sabe que se han vendido tantas entradas de 25 euros como de las otras dos categorías juntas; y también que ha habido 9 asistentes menores de edad por cada uno de aquellos de al menos 60 años. Si la recaudación final fue de 8300 euros, calcule el número de asistentes de cada rango de edad.